



TITLE:

# 3次元球面内の輪環体についての基本的性質 (Combinatorial Topology)

AUTHOR(S):

鈴木, 晋一

---

CITATION:

鈴木, 晋一. 3次元球面内の輪環体についての基本的性質 (Combinatorial Topology). 数理解析研究所講究録 1972, 152: 21-52

ISSUE DATE:

1972-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106819>

RIGHT:

## 3次元球面内の輪環体 についての基本的性質

神戸大 理 鈴木 晋 一

### §0. 序

以下、PL 圏での話である。種数  $p$  の輪環体、これを  $T_p$  で示す、とは、Euler characteristic  $1-p$  の連結な 1 次元複体の 3 次元球面における正則近傍と位相同型な 3 次元多様体とする。

以前の論文 [14] において、対  $(T_p \subset S^3)$  に関する素な分解の一意性について証明したが、二つの補題 3.10 と 3.11 はいささか不注意に書いた。このノートでは、対  $(T_p \subset S^3)$  について知られる基本的な性質を整理し、またこれの取扱いに關する基本的な手法について詳しく述べたい。最後に、津久井氏の論文 [16] に述べられる特殊な場合について、分解の一意性の証明を与える。(尚、分解定理については §3 参照。)

### §1. 定義と準備

1.1.  $D^n$  と  $S^n$  により、標準的な  $n$  次元胞体と  $n$  次元球面を示す。特に、 $D^1$  とまたは  $S^1$  と位相同型なものを、それぞれ 単純弧、単純閉曲線 という。一般に単純閉曲線に対して方向を指定していいが、必要の際は適当な方向を与えて考えていただきたい。

尚、3次元多様体 はすべて、コンパクト、連結かつ方向付可能なものとする。

1.2. 定義 : 3次元多様体  $M$  が irreducible とは、 $M$  における任意の 2次元球面が  $M$  の 3次元胞体を bound するとき、また  $\partial$ -irreducible とは、 $M$  における任意の proper な 2次元胞体  $C$  について、 $\partial C$  が  $\partial M$  で 2次元胞体を bound するときとする。

1.3. イソトピー : 位相写像  $\psi: Y \rightarrow Y'$  のイソトピーとは、 $H(y, t) = (\eta_t y, t)$  なる位相写像  $H: Y \times [0, 1] \rightarrow Y' \times [0, 1]$  のことである。但し、 $\eta_t: Y \rightarrow Y'$  は位相写像で、 $\eta_0 = \psi$  とする。 $Y$  の部分空間  $X_1$  と  $X_2$  のイソトピーとは、 $\eta_1(X_1) = X_2$  なる  $Y$  の恒等写像のイソトピーである。この時、特に  $X_1 \approx X_2$  で示す。

1.4. 便宜上の約束 : 以下の諸では、3次元多様体  $M$  に proper に埋蔵されている二つの 2次元多様体  $X_1$  と  $X_2$ 、(但し共に連結とは限らない) を考察することが多い。よく知られ

る“一般の位置”の議論により、 $M$ の恒等写像のイソトピーが存在して  $\gamma_1(X_1)$  と  $X_2$  が transversal に交わるように出来る。よって以下では、特にことわらない限り、“ $X_1 \cap X_2$  は、有限個の互いに交わらない単純弧と単純閉曲線とから成り、それらは  $X_1$  においても  $X_2$  においても proper である。”と仮定する。

またいわゆる“最小”の曲線というのをよく利用する。即ち、 $X_1 \cap X_2$  の単純閉曲線  $\Gamma$  が  $X_1$  上で最小であるとは、 $\Gamma$  が  $X_1$  上で、 $\dot{C} \cap X_2 = \emptyset$  なる2次元胞体  $C$  を bound するとき、また  $X_1 \cap X_2$  の単純弧  $\gamma$  が  $X_1$  上で最小であるとは、 $\gamma$  が  $X_1$  から  $\dot{C} \cap X_2 = \emptyset$  なる2次元胞体  $C$  を切りとるときである。今  $X_1 \cong S^2$ 、または  $X_1 \cong D^2$  で更に  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$  ならば、 $X_1 \cap X_2$  には少なくとも一つの最小な単純弧または単純閉曲線が  $X_1$  には存在し、更に  $X_1 \cap X_2$  に単純閉曲線が含まれているならば、 $X_1$  上には必ず最小の単純閉曲線が存在することは明らかである。

1.5. 補題:  $M$  を irreducible な3次元多様体、 $D_1$  と  $D_2$  を  $\partial D_1 = \partial D_2$  なる  $M$  の proper な2次元胞体とする。すると、 $\partial M$  を固定した  $M$  における  $D_1$  と  $D_2$  のイソトピーが存在する。

証明: 略

1.6. 定義: (1)  $A$  と  $B$  を、それぞれ2次元閉多様体  $F$  上の、互いに交わらない単純閉曲線の系とする。 $A \cap B$  が

互いに交叉するような有限個の点から成り、更に  $A$  の一つの弧と  $B$  の一つの弧によって bound される  $F$  上の 2 次元胞体が全く存在しないとき、 $A$  と  $B$  とは 簡約化されている という。

(2)  $M$  を 3 次元多様体、 $C$  と  $D$  を、それぞれ  $M$  における互いに交叉しない proper な 2 次元胞体の系とする。 $\partial C$  と  $\partial D$  が  $\partial M$  で簡約化されており、更に  $C \cap D$  が単純閉曲線を含まないとき、 $C$  と  $D$  とは 簡約化されている という。

1.7. 補題 (Epstein [2]) :  $A$  と  $B$  とを、それぞれ 2 次元閉多様体  $F$  上の、互いに交わらない単純閉曲線の系とすると、 $F$  の恒等写像のイソトピーで、 $\eta_1(A)$  と  $B$  が簡約化されているものが存在する。

1.8. 補題 :  $M$  を irreducible な 3 次元多様体、 $C$  と  $D$  とをそれぞれ互いに交わらない  $M$  における proper な 2 次元胞体の系とする。更に  $H$  を 1.7 で得られる  $\partial C$  と  $\partial D$  とを簡約化する  $\partial M$  の恒等写像のイソトピーとする。すると、 $H$  は、 $\eta_1(C)$  と  $D$  とを簡約化するような  $M$  の恒等写像のイソトピーに拡張できる。

証明 : Epstein [2] の議論より、 $H$  は明らかに  $M$  の恒等写像のイソトピー、再び  $H$  で示す、に拡張できる。 $\eta_1(C) \cap D$  が単純閉曲線を含んでいるなら、 $M$  の irreducible の条件を用いて、 $\eta_1(C)$  上の最小の単純閉曲線から順に、 $\partial M$  を固定するよ

うな  $M$  の イソトピーで単純閉曲線を除去すればよい。

1.9. Meridian と Meridian-disk :  $M$  を  $\partial M \neq \emptyset$  であつて  $\partial M$  が連結な 3次元多様体とする。  $\partial M$  上の単純閉曲線  $a$  について、  $a \simeq 1$  (in  $M$ ) かつ  $\partial M - a$  が連結のとき、  $a$  を  $M$  の meridian と呼ぶ。互いに交わらない  $M$  の meridian の集まり  $\{a_1, \dots, a_n\}$  について、  $\partial M - (a_1 \cup \dots \cup a_n)$  が連結のとき  $\{a_1, \dots, a_n\}$  を  $M$  の meridian の系 と呼ぶ。更に、  $M$  における proper な 2次元胞体  $A$  と、互いに交わらない proper な 2次元胞体の集まり  $\{A_1, \dots, A_n\}$  をそれぞれ、  $\partial A$  と  $\{\partial A_1, \dots, \partial A_n\}$  が meridian と meridian の系  $a$  のとき、 meridian-disk, meridian-disk の系 と呼ぶ。  $M$  が irreducible であれば、 meridian  $a$  と、 meridian の系  $\{a_1, \dots, a_n\}$  に対して、  $\partial A = a_1$ ,  $\{\partial A_1, \dots, \partial A_n\} = \{a_1, \dots, a_n\}$  なる meridian-disk  $A$  と meridian-disk の系  $\{A_1, \dots, A_n\}$  が存在し (Dehn's Lemma [11] と Loop Theorem [10], [13] に依る)、 イソトピーを除いて一意である (補題 1.5 と 1.8 に依る)。

次に挙げるのは、輪環体のよく知られた特性である。

1.10. 補題 :  $M$  を、  $S^3$  に埋蔵可能な 3次元多様体で、  $\partial M$  が連結でその種数を  $p$  とすると、次の三つは同値である：

- (1)  $M \cong T_p$ .
- (2)  $M$  の meridian の系  $\{a_1, \dots, a_p\}$  が存在する。
- (3)  $\pi_1(M)$  が階数  $p$  の自由群である。

1.11. 補題 (Feustel [3], Griffiths [5], etc.):  $\gamma$  を  $\partial T_p$  上の単純閉曲線とし、 $p \geq 1$  とすると、次の三つは同値である:

(1)  $T_p$  に  $\gamma$  に沿って 3次元胞体を張付けて得られる 3次元多様体が、種数  $p-1$  の輪環体である。

(2)  $T_p$  の meridian の系  $\{a_1, \dots, a_p\}$  が存在し、 $\gamma \cap (a_1 \cup \dots \cup a_p) = \gamma \cap a_1$  は唯一つ交差点から成る。

(3) 商群  $\pi_1(T_p)/\{\gamma\}^\nu$  が階数  $p-1$  の自由群である。ここに  $\{\gamma\}^\nu$  は、ホモトピー類  $[\gamma]$  を含む  $\pi_1(T_p)$  の最小の正規部分群を示す。

1.12. 定義:  $M$  と  $M'$  を、 $\partial M \neq \emptyset$ ,  $\partial M' \neq \emptyset$  が連結であるような 3次元多様体とする。  $M$  と  $M'$  の disk-sum, これを  $M \# M'$  と記す、は  $\partial M$  上の 2次元胞体を  $\partial M'$  上の 2次元胞体に張り合わせるにより得られる。  $\#$  は位相同型を除いて well-defined であり、可換であり結合律も成り立つ。連結な境界を持つ 3次元多様体  $M$  が  $\partial$ -素 であるとは、 $M \neq D^3$  でさらに  $M$  の任意の分解  $M = M_1 \# M_2$  について  $M_1, M_2$  の少くとも一方が 3次元胞体のときである。次が成り立つ。

1.13. 補題 (Gross [6], Swarup [15]):  $M$  を連結な境界を持つ 3次元多様体とする。  $M \neq D^3$  ならば、 $M$  は  $\partial$ -素な 3次元多様体  $P_1, \dots, P_n$  の disk-sum と位相同型であり、 $P_n$  は順序と位相同型を除いて一意的に決定される。

## §2. $S^3$ に埋蔵され得る 3次元多様体.

2.1. 定義:  $SC$  により、連結な境界を持ち、 $S^3$  に埋蔵可能な 3次元多様体の集合を示す。

実際、対  $(T_p \subset S^3)$  の研究において、 $SC$  の元の性質を知ることが重要である。次に挙げる三つの補題はよく知られているもので、時にことわりなく利用することがある。

2.2. 補題 (Fox [4]):  $SC$  に属する 3次元多様体  $M$  に対して、 $M \cong S^3 - \dot{T}_p$  なる対  $(T_p \subset S^3)$  が存在する。

2.3. 補題 (Papakyriakopoulos [11]):  $SC$  に属する 3次元多様体は irreducible である。 ([15] の Prop. 2.7 等を参照.)

2.4. 補題:  $M, M'$  を  $SC$  に属する 3次元多様体とする。

(1) disk-sum  $M \# M'$  もまた  $SC$  に属する。

(2)  $\partial M$  の種数が 1 ならば、 $M$  は  $\partial$ -素である。

(3)  $\partial M$  の種数が 1 より大きいとき、 $M$  が  $\partial$ -素である必要十分条件は、 $M$  が  $\partial$ -irreducible なることである。 ([15] 参照.)

(4)  $M = T_1 \cong D^2 \times S^1$  が、 $SC$  に属し、 $\partial$ -素であってしかも  $\partial$ -irreducible ではない唯一の 3次元多様体である。

(5)  $M$  が  $\partial$ -素であるための必要十分条件は、 $\pi_1(M)$  が自由積に関して分解不可能なことである。 ([8] を参照.)

次に  $SC$  に属する 3次元多様体に proper に埋蔵されている 2次元胞体について調べる。ここに挙げる性質は、今回の話



のなかで最も重要な役割をはたすものである。

2.5. 2次元胞体の変更:  $C$  を 3次元多様体  $M$  に埋蔵されている proper な 2次元胞体とする。今  $M$  中の 2次元胞体  $\nabla$  で、次の条件を満たすものが存在すると仮定する:  $\nabla \cap C = \partial \nabla \cap C$  は一つの単純弧から成り、 $\nabla \cap \partial M = \partial \nabla \cap \partial M = \overline{\partial \nabla - C}$ . 図1(a) を参照。このとき、 $\overline{\partial N(C \cup \nabla; M) \cap \overset{\circ}{M}}$  は三つの互いに交わらない proper な 2次元胞体となる。(  $N(X; Y)$  は  $X$  の  $Y$  における正則近傍を示す。) このうちの一つは  $M$  において  $C$  とイソトープであり、残り二つを  $C_1 \cup C_2$  とすると、これらは  $C$  とイソトープではない。“ $C_1 \cup C_2$  は、 $C$  から (2次元胞体  $\nabla$  に沿った)  $\nabla$  型変更によって得られた” と言う。

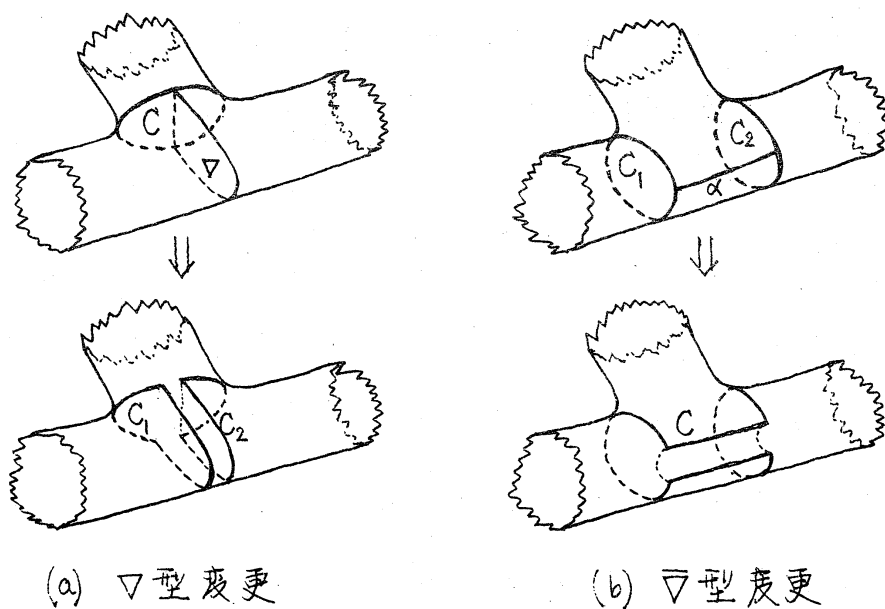


図 1

逆に、 $C_1$  と  $C_2$  を 3次元多様体内の互に交わらない proper

2次元胞体とし、 $\alpha$ を次の条件を満たす $\partial M$ 上の単純弧とする：  
 $\alpha \cap (\partial C_1 \cup \partial C_2) = \partial \alpha$  ,  $\partial \alpha \cap \partial C_1 \neq \emptyset \neq \partial \alpha \cap \partial C_2$  . すると  
 $\overline{\partial N(C_1 \cup \alpha \cup C_2; M)} \cap \overset{\circ}{M}$  もまた三つの互いに交わらない proper  
 な2次元胞体となる。このうちの二つは $C_1$ と、もう一つは $C_2$   
 とそれぞれ $M$ のイソトープとなり、残り一つを $C$ とすると、  
 $C$ は $C_1$ とも $C_2$ ともイソトープにはならない。“ $C$ は $C_1 \cup C_2$   
 から、(単純弧 $\alpha$ に沿っての)  $\nabla$ 型変更にによって得られた”と  
 言う。(図1(b)参照)。

2.6. 補題 (Hosokawa):  $\{A_1, \dots, A_p\}$  を  $T_p$  の meridian-disk  
 の系、 $C$  を  $T_p$  の proper な2次元胞体とする。 $C$  は、互いに交  
 わらない proper な2次元胞体  $C_1, \dots, C_n$  から、有限回の  $\nabla$  型  
 変更にによって得られる。但し、各  $C_i$  は、 $T_p$  において  $A_1, \dots,$   
 $A_p$  の一つとイソトープである。

証明: まず次の条件を満たす互いに交わらない proper な  
 2次元胞体  $\{D_1, \dots, D_p\}$  を選ぶ: 各  $D_i$  は  $T_p$  を 種数1の輪環体  
 $T_1^i$  と 種数  $p-1$  の輪環体  $T_{p-1}^i$  に分割し、それぞれは  $\{A_i\}$  と  
 $\{A_1, \dots, \check{A}_i, \dots, A_p\}$  を meridian-disk の系として持つ。実際、  
 meridian-disk の系の定義より、 $\partial M$  上に互いに交わらない単  
 純閉曲線の系  $\{b_1, \dots, b_p\}$  を  $\partial A_i \cap b_i$  が一つの交叉点から  
 成り、 $\partial A_i \cap b_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ , なるように選ぶことが出来るので、  
 各  $D_i$  は、 $A_i$  とイソトープな二つの proper な2次元胞体から、

$b_i$  に沿った  $\nabla$  型変更に より簡単に得られる。今、補題 1.7, 1.8, 2.3 より、 $C$  と  $\{D_1, \dots, D_p\}$  は簡約化されていると仮定する (即ち、 $C \cap (D_1 \cup \dots \cup D_p)$  は単純閉曲線を含まない)。

もし  $C \cap (D_1 \cup \dots \cup D_p) = \emptyset$  なら、 $C$  はある一つの種数 1 の輪環体  $T_1^1$  か、3次元胞体  $D_0^3 = \overline{T_p - (T_1^1 \cup \dots \cup T_1^p)}$  に含まれている。もし  $C \subset T_1^1$  なら、明らかに  $C \approx A_1$  か  $C \approx D_1$  であり、いずれの場合も補題は明らか。もし  $C \subset D_0^3$  なら、 $C$  はいくつかの  $D_1, \dots, D_p$  より  $\nabla$  型変更に繰返して得られるので、これも補題が成り立つ。

$C \cap (D_1 \cup \dots \cup D_p) \neq \emptyset$  のとき、 $C \cap D_i$  の  $D_i$  上で最小の単純弧を選び、それが  $D_i$  から切取る 2次元胞体に沿って  $\nabla$  型変更に次々  $C$  に施すことにより、 $C$  は有限個の互いに交わらない 2次元胞体  $C'_1 \cup \dots \cup C'_m$  となり、 $C'_j \cap (D_1 \cup \dots \cup D_p) = \emptyset$  となる。最初の場合の議論と、 $\nabla$  型変更に  $\nabla$  型変更に定義より、補題は証明された。

2.7. 補題 2.6 を  $\mathbb{S}C$  に属する 3次元多様体  $M$  に拡張する為には、次の特別な分解を考えよう。今  $M \cong P_1 \# \dots \# P_u$  とし、 $P_1, \dots, P_u$  は  $\partial$ -素とする。  $D_0^3$  を 3次元胞体、 $D_1, \dots, D_u$  を互いに交わらない  $\partial D_0^3$  上の 2次元胞体とする。  $\partial P_i$  上の 2次元胞体を  $D_i$  に張付けることにより 3次元多様体  $M^*$  を得る。 $M^* \cong P_1 \# \dots \# P_u \cong M$  だから、 $M$  においては、次の (\*) を

満たす互いに交わらない proper な 2次元胞体の系  $\{D_1, \dots, D_u\}$  が存在する:

(\*) 各  $D_i$  は  $M$  を二つの 3次元多様体  $M_1^i \cong P_i$  と  $M_2^i \cong P_1 \# \dots \# \overset{\vee}{P_i} \# \dots \# P_u$  に分割する.

## 2.8. 定理: $M$ を 2素数分解

$$M \cong P_1 \# \dots \# P_r \# P_{r+1} \# \dots \# P_u$$

を持つ  $\mathcal{SC}$  に属する 3次元多様体とし、 $P_i \neq T_1$  ( $i=1, \dots, r$ ),  $P_j \cong T_1$  ( $j=r+1, \dots, u$ ) と仮定する。  $\{D_1, \dots, D_u\}$  を条件 (\*) を満たす  $M$  の proper な 2次元胞体の系、  $A_{r+1}, \dots, A_u$  をそれぞれ  $P_{r+1}, \dots, P_u$  の meridian-disk とする。更に、  $C$  を  $M$  の proper な 2次元胞体とすると、  $C$  は互いに交わらない proper な 2次元胞体  $C_1, \dots, C_n$  から、有限回の  $\nabla$  型変更によって得られる。但し、各  $C_i$  は、  $M$  において、  $D_1, \dots, D_r, A_{r+1}, \dots, A_u$  の一つとイソトープである。

証明: 補題 2.6 とほとんど同じなので省略する。もし、

$\partial C \neq 1$  (on  $\partial M$ ) で、  $C \subset P_i$ , ( $i=1, \dots, r$ ) をらば、補題 2.4 により  $C \approx D_i$  となることだけ注意しておく。

2.9. 参考: 定理 2.8 の応用として、前に挙げた 1.13 を  $\mathcal{SC}$  に属する 3次元多様体  $M$  に限って議論してみよう。これは後の対  $(T_p C S^3)$  の分解定理の証明 (§5) の理解にも役立ってであろう。まず 2素数分解の存在は、補題 2.4 と  $\partial M$  の種数

が有限であることより、簡単に証明される。従って問題はそ  
の一意性の証明であるが、次の命題を示せば十分である：

$\left[ \begin{array}{l} M \text{ を定理 2.8 と同じものとする。もし } M \text{ が } M \cong M_1 \# M_2 \\ \text{なる分解を持つならば、} P_i \text{ の添数を適当に付け変える} \\ \text{ことにより、} M_1 \cong P_1 \# \cdots \# P_t, M_2 \cong P_{t+1} \# \cdots \# P_u, \\ 0 \leq t \leq u, \text{ と置ける。} \end{array} \right]$

注意：上記の補題 2.8 (従って 2.7) では、分解の一意性は用  
いていない。

証明：  $\{D_1, \dots, D_u\}$  と  $A_{r+1}, \dots, A_u$  を 2.8 と同じものとする。

仮定から、 $M$  を  $M_1$  と  $M_2$  に分割する proper な 2次元胞体  $C$   
が存在する。定理 2.8 により、 $C$  は互いに交わらない proper  
な 2次元胞体の系  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$  から、有限回の  $\nabla$  型変更  
により得られる。但し、各  $C_i$  は  $D_1, \dots, D_r, A_{r+1}, \dots, A_u$  の一  
つとイソトープである。 $\mathcal{C}$  は  $M$  を幾つかの連結要素に分割す  
る。これを  $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$  とすると、各  $V_i$  は位相同型  
を除いて集合

$\mathcal{D} = \{D^3, P_1, \dots, P_u, \text{これら } P_1, \dots, P_u \text{ の幾つかの disk-sums}\}$   
に属し、更に各  $P_1, \dots, P_r$  は丁度一つの  $\mathcal{V}$  の元  $V_i$  についてのみ、  
その 2-素を要素として含まれる。

さて、 $\mathcal{C}$  の二つの要素、これを仮に  $C_{n-1}$  と  $C_n$  とする、に  
対して最初の  $\nabla$  型変更を行い、得られた 2次元胞体を  $C_{n-1}$  と

記すことにする。すると、新しい2次元胞体の系  $C' = \{C_1, \dots, C_{n-1}\}$  と  $C'$  が  $M$  を分割して得られる3次元多様体の集合  $\mathcal{V}' = \{V'_1, \dots, V'_m\}$  が得られる。ここで二つの場合が考えられる。

(i)  $\mathcal{V}'$  に丁度一つ元, これを  $V'_m$  とする, が存在して,  $V'_m \cap C_{n-1} \neq \emptyset$  となるとき:  $\bar{\alpha}$  型変換の定義から,  $V'_m$  は  $\mathcal{V}$  の一つのエと  $T_1$  との disk-sum と位相同型となることがすぐ判る。もし  $r=u$  ならば,  $C$  の各元も  $C'$  の各元も, 必ず  $M$  を二つの連結要素に分割するので, この (i) の場合は生じない。従って  $V'_m$  は再び集合  $\mathcal{P}$  に属し, 特に各  $P_1, \dots, P_r$  は丁度一つ  $\mathcal{V}'$  の要素に対してその2-素を要素として含まれる。

(ii)  $\mathcal{V}'$  に丁度二つの元, これを  $V'_{m-1}$  と  $V'_m$  とする, が存在して,  $V'_{m-1} \cap C_{n-1} \neq \emptyset \neq V'_m \cap C_{n-1}$  となるとき: 再び  $\bar{\alpha}$  型変換の定義より,  $V'_{m-1}$  と  $V'_m$  の一方は  $\mathcal{V}$  の一つのエと位相同型であり, 他の一方は  $\mathcal{V}$  の二つのエの disk-sum が  $\mathcal{V}$  の一つのエと  $T_1$  との disk-sum のいずれかと位相同型となることが容易に結論される。実際  $r=u$  ならば, (i) で述べたと同じ理由で最後の場合, 即ち  $\mathcal{V}$  のエと  $T_1$  との disk-sum, は生じない。結局  $\mathcal{V}'$  の元はすべて集合  $\mathcal{P}$  に属し, 更に各  $P_1, \dots, P_r$  は丁度一つ  $\mathcal{V}'$  のエに対してその2-素を要素として含まれる。

上の議論を反復すると, 最後には  $C^{(n-2)} = \{C\}$  と  $\mathcal{V}^{(n-2)} = \{V_1^{(n-2)}, V_2^{(n-2)}\} = \{M_1, M_2\}$  が得られ,  $M_1$  も  $M_2$  も  $\mathcal{P}$  に属しかつ各  $P_1, \dots,$

$P_r$  は  $M_1$  と  $M_2$  のどちらか一方の 2-素を要素として含まれることが判る。この時  $M_1 \cong P_1 \# \cdots \# P_s \# T_1 \# \cdots \# T_l$  ならば、群論でよく知られる Grushko-Neumann の定理により、 $M_2$  は  $u-r-l$  個の  $T_i$  を 2-素を要素として持つことが判り、証明は完結する。

2.10. 定理 2.8 の系:  $M$  を  $SC$  に属する 3次元多様体とし、 $\pi_1(M) \cong G_1 * G_2$  で更に、 $G_1, G_2$  共に自由積に関して分解不可能で無限巡回群でないとは定する。  $C_1$  と  $C_2$  を、 $M$  の proper な 2次元胞体で、 $\partial C_1 \neq 1 \neq \partial C_2$  (on  $\partial M$ ) とすると、 $C_1 \approx C_2$ 。

2.11. 定理 2.8 の系:  $M$  を  $SC$  に属する 3次元多様体とし、 $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z} * G$  で更に、 $G$  は自由積に関して分解不可能で、 $G \neq \mathbb{Z}$  と仮定する。  $C_1$  と  $C_2$  を、 $M$  の proper な 2次元胞体で  $\partial C_1 \neq 0 \neq \partial C_2$  (on  $\partial M$ ) とすると、 $C_1 \approx C_2$ 。

2.10, 2.11 のいずれの場合も、仮定を満たす 2次元胞体  $C_1, C_2$  の存在は、補題 2.4 に依る。証明はいずれも初等的で  $C_1, C_2$  の条件と、 $\nabla$  型変更の定義を活用して得られるので、省略する。

### § 3. 対 $(T_p \subset S^3)$ の素な分解. 主定理

ここぞ、序で述べた対の分解定理を整理し、更にこの話の主定理を挙げる。

3.1. 定義: 二つの対  $(T_p \subset S^3)$  と  $(T_{p'} \subset S^3)$  とが 合同 とは、

方向を保つ位相写像  $\psi: S^3 \rightarrow S^3$  で  $\psi(T_p) = T'_p$  をなすものが存在するときとする。

もちろんこの合同の関係は、同値関係である。対  $(T_p \subset S^3)$  の合同類を  $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  で表し、 $(T_p \subset S^3)$  の knot type という。もし  $(T_p \subset S^3)$  と  $(T'_p \subset S^3)$  が合同ならば、それらの補空間  $S^3 - \overset{\circ}{T}_p$  と  $S^3 - \overset{\circ}{T}'_p$  はもちろん位相同型であるので、混乱の無い場合には、“ $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  の補空間  $S^3 - \overset{\circ}{T}_p$ ” により、 $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  のある代表元  $(T_p \subset S^3)$  の補空間  $S^3 - \overset{\circ}{T}_p$  を意味するものとする。

3.2. 対の和：二つの knot type  $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  と  $\langle T_q \subset S^3 \rangle$  とが、同一の  $S^3$  の中で、しかも2次元球面  $S^2_0$  の反対側に表現されており、 $T_p \cap T_q = \partial T_p \cap \partial T_q = D^2_0 \subset S^2_0$  を2次元胚体  $D^2_0$  を共有しているとすると、種数  $p+q$  の対  $(T_p \cup_{\partial} T_q \subset S^3)$  を得る。この新しい対の合同類を  $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  と  $\langle T_q \subset S^3 \rangle$  の和といい、 $\langle T_p \subset S^3 \rangle \# \langle T_q \subset S^3 \rangle$  で示す。また  $S^2_0$  は  $\langle T_p \cup T_q \subset S^3 \rangle$  の分解  $\langle T_p \subset S^3 \rangle \# \langle T_q \subset S^3 \rangle$  を与えるという。

Alexander の定理 [1] と Newman-Gugenheim の homogeneity Th. により、次が得られる。

3.3. 補題：すべて a knot type の集合  $\{\langle T_p \subset S^3 \rangle \mid p=0,1,2,\dots\}$  において、和  $\#$  は well-defined であり、可換で結合律も成り立つ。即ち、 $\{\langle T_p \subset S^3 \rangle \mid p=0,1,2,\dots\}$  は、演算  $\#$  のもとで可換な半群となる。特に、 $\langle T_0 \subset S^3 \rangle$  がその単位となる。



3.4. 定義: knot type  $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  が素であるとは、 $p \neq 0$  であり、 $\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \langle T_{p_2} \subset S^3 \rangle$  なる任意の分解について、 $p_1 = 0, p_2 = 0$  の少なくとも一方が必ず成立するとき。  
この定義より次が得られる。

3.5. 補題: もし  $\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \langle T_{p_2} \subset S^3 \rangle$  ならば、  
 $p = p_1 + p_2$  である。

3.6. 補題: すべての種数 1 の knot type  $\langle T_1 \subset S^3 \rangle$  は素である。

上記補題 3.5 と 3.6 と、種数の有限性とにより次を得る。

3.7. 定理: すべての  $p \neq 0$  なる knot type  $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  は、素な knot types の和  $\langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{p_u} \subset S^3 \rangle$  に分解される。

そこで当然ながら、その分解の一意性の問題となる。即ち

3.8. 問題:  $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  についての素な分解は一意的か？即ち 3.7 における和の要素  $\langle T_{p_i} \subset S^3 \rangle$  は一意的に決定されるか？

この問題の解答はまだ無い。次に挙げるのが、今回の話の主定理である (Tsukui [16], Theorem 5 参照)。

3.9. 定理:  $p \neq 0$  なる knot type  $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  の素分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{p_u} \subset S^3 \rangle$$

を持ち、各  $i=1, \dots, u$  について

$$(**) \quad S^3 - \dot{T}_{p_i} \text{ は 2-素 である}$$

と仮定する。更に、 $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  が素分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{q_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{q_u} \subset S^3 \rangle$$

を持つならば、これら二つの素分解は順序を除いて一致する。

証明は §§ 4 と 5 で与える。条件(\*\*)を満たさない素な knot types が存在するとは、別の機会に述べたので、今回は省略する。3.9 の証明の前に系を挙げておく。

3.10. 系:  $p \neq 0$  なる knot type  $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  が二つ素分解

$$\begin{aligned} \langle T_p \subset S^3 \rangle &= \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{p_p} \subset S^3 \rangle \\ &= \langle T_{q_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{q_p} \subset S^3 \rangle \end{aligned}$$

を持つとすると、この二つの素分解は順序を除いて一致する。

証明: 明らかに  $p_i = 1 = q_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , だから、2.4 により、 $S^3 - \dot{T}_{p_i}$ ,  $S^3 - \dot{T}_{q_i}$  はすべて 2-素である。

3.11. 系: knot type  $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  について、 $\pi_1(S^3 - \dot{T}_p) \cong G_1 * G_2$  であり、 $G_1, G_2$  が自由積に関して分解不可能ならば、 $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  の素分解は一意的である。

3.12. 系: 種数 2 の knot type  $\langle T_2 \subset S^3 \rangle$  の素分解は一意的である。

上記の二つの系は、定理 3.9 を用いずとも、前章の系 2.10 と 2.11 を用いて、容易に証明される。

#### § 4. Unknotted 対 ( $T_p \subset S^3$ ).

4.1. 定義: 対 ( $T_p \subset S^3$ ) が unknotted とは,  $S^3 - \dot{T}_p \cong T_p$ .

Dehn's Lemma により次を得る.

4.2. 補題: 種数 1 の unknotted 対は互いに合同である.

この補題により、種数 1 の unknotted 対の合同類を、特に  $\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$  で示す。更に  $(n-1)\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0 \# \langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$  を単純に  $n\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$  と記す。もちろん  $\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$  は素である。

もし対 ( $T_p \subset S^3$ ) が unknotted ならば  $\partial T_p$  は  $S^3$  の Heegaard の分解を与える。従って、Waldhausen の結果を我々の立場で言換えると次のようになる。

4.3. 補題 (Waldhausen [17]):  $p \neq 0$  なる ( $T_p \subset S^3$ ) が unknotted ならば、 $\langle T_p \subset S^3 \rangle = p\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$  を素分解を持ち一意である。

補題 4.3 は、unknotted 対 ( $T_p \subset S^3$ ) に対しては、特に  $T_p$  の meridian の系  $\{a_1, \dots, a_p\}$  と  $S^3 - \dot{T}_p$  の meridian の系  $\{b_1, \dots, b_p\}$  が存在して、 $a_i \cap b_i$  が丁度一つの交叉点から成り、 $a_i \cap b_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ , が成り立つ。Papakyriakopoulos [12] を参照。

定理 3.9 を証明する為に、次の補題が重要である。

4.4. 補題:  $p \neq 0$  なる knot type  $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  が素分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \dots \# \langle T_{p_v} \subset S^3 \rangle \# n\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$$

を持ち、各  $i=1, \dots, v$ , について

$$(***) \quad S^3 - \dot{T}_{p_i} \text{ は } \partial\text{-irreducible である}$$

と仮定する。更に  $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  が分解  $\langle T_{p-n} \subset S^3 \rangle \# n \langle T_1 \subset S^3 \rangle$  を持つならば、

$$\langle T_{p-n} \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{p_v} \subset S^3 \rangle$$

である。

証明には、Waldhausen [17] に依る "gates System" の概念を  $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  に拡張して利用する。

4.5. 定義: 3次元多様体  $S^3 - \dot{T}_p$  の meridian-disk の系  $A = \{A_1, \dots, A_n\}$  が  $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  の good-system であるとは、 $T_p$  の meridian-disk の系  $B = \{B_1, \dots, B_n\}$  が存在して次を満たす:

(i)  $A_i \cap B_i = \partial A_i \cap \partial B_i$  は丁度一つの交叉点から成る,

(ii)  $A_i \cap B_j = \emptyset$  for  $i > j$ .

$B$  を  $A$  に対する ordered-system と言う。

以下 good-system の性質をいくつか挙げておく。

4.6. 補題 (Waldhausen [17]):  $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  の任意の good-system  $A = \{A_1, \dots, A_n\}$  に対して、

(ii)'  $A_i \cap B_j = \emptyset$  for  $i \neq j$ ,

を満たす ordered-system  $B = \{B_1, \dots, B_n\}$  が存在する。

証明は、[17] の Lemma (2.2) と全く同じである。次の初等的な事実がなかなか有力である。

4.7. 補題:  $\{A_i\}$  を  $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  の good-system,  $\{B_i\}$  を ordered-system とすると、2次元球面  $\partial N(A_i \cup B_i; S^3)$  は分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p-1} \subset S^3 \rangle \# \langle T_1 \subset S^3 \rangle^{\circ}$$

を与える。更に次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \langle T_{p-1} \subset S^3 \rangle &= \langle T_p \cup N(A_1; S^3 - \dot{T}_p) \subset S^3 \rangle \\ &= \langle \overline{T_p - N(B_1; T_p)} \subset S^3 \rangle. \end{aligned}$$

補題 4.7 に補題 1.11 と 4.6 を合わせると次を得る。

4.8. 補題:  $A = \{A_1, \dots, A_n\}$  を  $(T_p \subset S^3)$  の good-system とすると、各  $i = 1, \dots, n$ , について

$$T_p(A_i) \equiv T_p \cup N(A_i; S^3 - \dot{T}_p) \cong T_{p-1}.$$

更に  $T_p(A) \equiv T_p \cup N(A_1; S^3 - \dot{T}_p) \cup \dots \cup N(A_n; S^3 - \dot{T}_p),$

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_p(A) \subset S^3 \rangle \# n \langle T_1 \subset S^3 \rangle^{\circ}.$$

4.9. 補題:  $A$  と  $A'$  が  $(T_p \subset S^3)$  の good-system で、 $B$  が共通の ordered-system ならば、 $\langle T_p(A) \subset S^3 \rangle = \langle T_p(A') \subset S^3 \rangle$ .

4.10. 定義:  $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ ,  $A' = \{A'_1, \dots, A'_n\}$  をそれぞれ 3次元多様体  $M$  の互に交わらない proper な 2次元胞体  $\alpha$  系とする。 $A$  と  $A'$  が 単純  $\bar{\nabla}$ -同値、 $A \bar{\sim} A'$  で示す、とは、 $A$  と  $A'$  の元の添数も適当に付け変えたと、 $A_i \approx A'_i$  (for  $i = 1, \dots, n-1$ ) であって、 $A'_n$  は  $A_{n-1} \cup A_n$  から、 $\bar{\nabla}$ 型変更に得られたとき。

$\bar{\nabla}$ 型変換の定義より、 $A_{n-1} \cup A_n$  から、 $\bar{\nabla}$ 型変換により  $A_n$  が得られるので、 $A \bar{\sim} A'$  ならばもちろん  $A' \bar{\sim} A$  である。

更に、 $A$  と  $A'$  が  $\bar{\nabla}$ -同値 とは、有限個の、 $M$  の proper な 2

次元胞体の系の列  $A = A_0, A_1, \dots, A_{m-1}, A_m = A'$  が存在して,  $A_i \bar{\sim} A_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m-1$ , のとき. もちろん  $\bar{\sim}$ -同値は, 同値関係であり, これを  $A \bar{\sim} A'$  で示す.

4.11. 補題:  $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ ,  $A' = \{A'_1, \dots, A'_n\}$  を, 対  $(T_p \subset S^3)$  の補空間  $S^3 - \dot{T}_p$  の proper な 2次元胞体の系とする. もし,  $A \bar{\sim} A'$  ならば,

$$\langle T_p \cup N(A; S^3 - \dot{T}_p) \subset S^3 \rangle = \langle T_p \cup N(A'; S^3 - \dot{T}_p) \subset S^3 \rangle.$$

証明:  $A \bar{\sim} A'$  のとき証明すれば十分である. ところが  $\partial(T_p \cup N(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}; S^3 - \dot{T}_p))$  上では  $\partial A_n \approx \partial A'_n$  であり, 証明は終わる.

4.12. 補題:  $A = \{A_1, \dots, A_n\}$  を  $(T_p \subset S^3)$  の good-system とし,  $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$  を  $S^3 - \dot{T}_p$  の互いに交わらない proper な 2次元胞体の系とする. もし,  $A$  と  $\mathcal{X}$  が次の三つの仮定

(1)  $A \cap \mathcal{X} = \emptyset$ ,

(2)  $T_p \cup N(\mathcal{X}; S^3 - \dot{T}_p) \cong T_{p-n}$ ,

(3) 各  $i = 1, \dots, n$ , について,  $\partial X_i \simeq 1$  (on  $\partial T_p(A)$ )

を満たすならば,  $A \bar{\sim} \mathcal{X}$  (in  $S^3 - \dot{T}_p$ ) である.

証明: 条件 (3) より,  $\mathcal{X} \bar{\sim} \mathcal{X}' = \{X'_1, \dots, X'_n\}$  で, (1)  $A \cap \mathcal{X}' = \emptyset$ , (2)  $T_p \cup N(\mathcal{X}'; S^3 - \dot{T}_p) \cong T_{p-n}$ , (3)'  $\partial X'_1 \cup \dots \cup \partial X'_n$  は  $\partial T_p(A)$  上で互いに交わらない 2次元胞体の系  $\tilde{X}_1 \cup \dots \cup \tilde{X}_n$  を bound する……を満たす 2次元胞体の系  $\mathcal{X}'$  が存在する. よって,  $A$

$\partial X'$  を示せばよい。

条件 (2) より、 $\partial X'_i = \partial \tilde{X}_i \sim 0$  (on  $\partial T_p$ ) であり、 $\partial T_p - (\partial X'_1 \cup \dots \cup \partial X'_n)$  が連結であることが判る。  $T_p(A)$  の定義より、各  $i = 1, \dots, n$ , について、 $\partial T_p(A)$  上に二つの 2次元胞体  $A_i^+ \cup A_i^-$  が存在して、 $A_i^+ \approx A_i \approx A_i^-$  (in  $S^3 - \dot{T}_p$ ) である。まず次を主張する：

(i) 各  $\tilde{X}_i, i=1, \dots, n$ , に対して、少なくとも一つの  $A$  の元、これを  $A_j$  とする、が存在して、 $A_j^+$  と  $A_j^-$  の一方が  $\tilde{X}_i$  に含まれ、他方が  $\tilde{X}_i$  には含まれない。なぜなら、もしこのような  $A_j$  が存在しないならば、明らかに  $\partial X_i = \partial \tilde{X}_i \sim 0$  (on  $\partial T_p$ ) となり、これは条件 (2) に反する。

そこで、

$$A(X'_i) = \{ A_j \in A \mid A_j^+ \subset \tilde{X}_i \text{ かつ } A_j^- \not\subset \tilde{X}_i, \text{ または } A_j^- \subset \tilde{X}_i \text{ かつ } A_j^+ \not\subset \tilde{X}_i \} \subset A$$

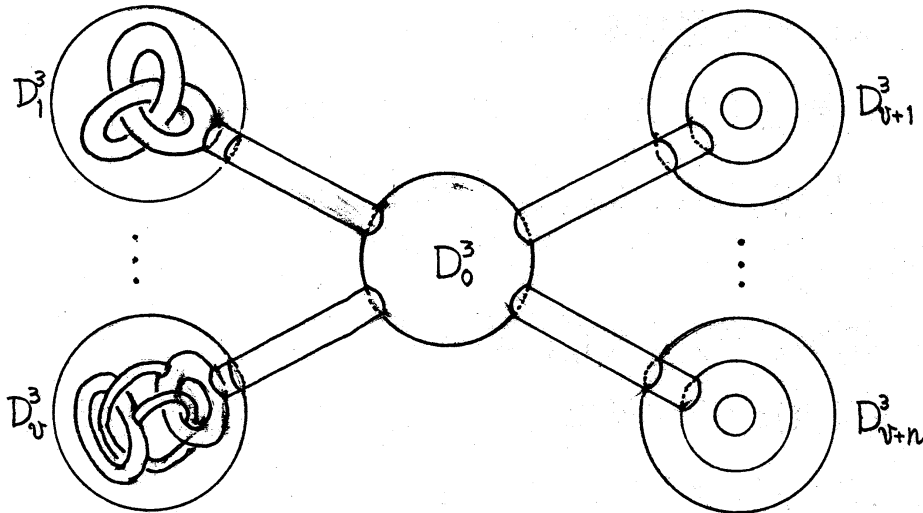
とおくと、次が判る：

(ii)  $i \neq k$  ならば  $A(X'_i) \neq A(X'_k)$ 。なぜなら、もし  $A(X'_i) = A(X'_k)$  ならば、 $\partial T_p - \partial X'_i - \partial X'_k$  は連結でなくなり、条件 (2) に反する。

これから後は簡単なので省略する。

4.13. 補題 4.4 の証明：判り易くするため、証明を三段に分割する。

第一段: まず,  $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  の代表元を次のようにとる:  $S^3$  の中に, 互いに交わらない  $v+n+1$  個の 3次元胞体  $D_0^3, D_1^3, \dots, D_{v+n}^3$  を選び, 各  $D_1^3, \dots, D_v^3$  の内部に  $\langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle, \dots, \langle T_{p_v} \subset S^3 \rangle$  の代表元を作り,  $D_{v+1}^3, \dots, D_{v+n}^3$  の内部に  $\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$  の代表元を作る.  $\partial D_0^3$  上に, 互いに交わらない  $v+n$  個の 2次元胞体をと, 各代表元の境界上の 2次元胞体と,  $\partial D_i^3$  とは一つの 2次元胞体で交わるような細い棒をつなぐ(下図参照).



次に,  $\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$  の各々の代表元について, good-system とその ordered-system を選ぶ: とに よ り,  $(T_p \subset S^3)$  の good-system  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$  とその ordered-system  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$  を得る. もちろん, (ii)'  $A_i \cap B_j = \emptyset$  for  $i \neq j$ , が成立し,  $\langle T_p(\mathcal{A}) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \dots \# \langle T_{p_v} \subset S^3 \rangle$  となる.

作り方から, SC に属する 3次元多様体  $S^3 - \dot{T}_p$  に対して  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_{n+v}\} = \{\partial D_1^3 \cap (S^3 - \dot{T}_p), \dots, \partial D_{n+v}^3 \cap (S^3 - \dot{T}_p)\}$  は 2.7



(\*) の条件を満たす 2 素な分解を与えていることに注意。

一方仮定から、 $(T_p \subset S^3)$  の good-system  $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$  ぞ。  
 $\langle T_p(\mathcal{X}) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p-n} \subset S^3 \rangle$  を満たすものが存在する。今、 $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_n\}$  を (ii)  $X_i \cap Y_j = \emptyset$  for  $i \neq j$ , なる ordered-system とする。  
 ここで、補題 1.7 と 1.8 とにより、 $\partial A \cup \partial \mathcal{Q}$  と  $\partial \mathcal{X}$ ,  
 $\partial A \cup \partial \mathcal{Q}$  と  $\partial \mathcal{Y}$ , とはそれぞれ  $\partial T_p$  上ぞ。 $A \cup \mathcal{Q}$  と  $\mathcal{X}$  とは  $S^3 - \dot{T}_p$  で  
 簡約化されているとしてよい。

今、 $A \cap \mathcal{X}$  の連結要素の個数を  $\lambda$  とすると次を得る：

(4.14) 補題：種数  $p+\lambda$  の対  $(T_{p+\lambda} \subset S^3)$  と、その二つの good-system  $\mathcal{A}' = \{A'_1, \dots, A'_{p+\lambda}\}$ ,  $\mathcal{X}' = \{X'_1, \dots, X'_{p+\lambda}\}$  が存在して、  
 次を満たす。

$$(1) \langle T_p(A) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+\lambda}(A') \subset S^3 \rangle,$$

$$\langle T_p(\mathcal{X}) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+\lambda}(\mathcal{X}') \subset S^3 \rangle.$$

$$(2) A' \cap \mathcal{X}' = \emptyset, \quad \mathcal{Q} \cap A' = \emptyset.$$

証明：もし  $A \cap \mathcal{X} = \emptyset$  ならば何もなくてよい。

今、 $A_i \cap X_j$  の単純弧  $\beta$  について、正則近傍  $N(\beta; S^3 - \dot{T}_p)$  とし、  
 二つの 2 次元胞体  $N(\beta; S^3 - \dot{T}_p) \cap \partial T_p = N(\beta \cap \partial T_p; \partial T_p)$  を  
 $B \cup Y$  とおく。 $T_p \cup N(\beta; S^3 - \dot{T}_p)$  は種数  $p+1$  の輪環体ぞ、これを  
 単に  $(T_{p+1} \subset S^3)$  と記し、この対について考察する。 $\beta$  は  $A_i$   
 ぞも  $X_j$  ぞも proper だから  $\overline{A_i - N(\beta; S^3 - \dot{T}_p)}$  と  $\overline{X_j - N(\beta; S^3 - \dot{T}_p)}$   
 も二つの 2 次元胞体から成る。これらを、それぞれ  $A_i^* \cup A_i^{**}$ ,

$X_j^* \cup X_j^{**}$  とおく。特に、 $A_i^* \cap B_i = A_i \cap B_i$ ,  $A_i^{**} \cap B_i = \emptyset$ ,  $X_j^* \cap Y_j = X_j \cap Y_j$ ,  $X_j^{**} \cap Y_j = \emptyset$  と仮定してよい。そこで次  $\alpha$  法則で添数と付与すると、新しい対  $(T_{p+1}(S^3))$  の二つの good-system  $A' = \{A'_1, \dots, A'_{n+1}\}$ ,  $X' = \{X'_1, \dots, X'_{n+1}\}$  を得る。

$$\begin{cases} A_k \rightarrow A'_k & \text{for } k < i, \\ A_i^* \rightarrow A'_i, A_i^{**} \rightarrow A'_{i+1}, \\ A_k \rightarrow A'_{k+1} & \text{for } k > i. \end{cases} \quad \begin{cases} B_k \rightarrow B'_k & \text{for } k < i, \\ B_i \rightarrow B'_i, B \rightarrow B'_{i+1}, \\ B_k \rightarrow B'_{k+1} & \text{for } k > i. \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_k \rightarrow X'_k & \text{for } k < j, \\ X_j^* \rightarrow X'_j, X_j^{**} \rightarrow X'_{j+1}, \\ X_k \rightarrow X'_{k+1} & \text{for } k > j. \end{cases} \quad \begin{cases} Y_k \rightarrow Y'_k & \text{for } k < j, \\ Y_j \rightarrow Y'_j, Y \rightarrow Y'_{j+1}, \\ Y_k \rightarrow Y'_{k+1} & \text{for } k > j. \end{cases}$$

明らかに: (1)  $\langle T_p(A) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+1}(A') \subset S^3 \rangle$ , (2)  $A' \cap X' = \langle T_p(X) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+1}(X') \subset S^3 \rangle$ ,  $A \cap X = \beta$  が成り立ち、更に  $\mathcal{D} \cap X' = \mathcal{D} \cap X$  である。

この操作を  $\lambda$  回繰返すとにより、(4.14) が得られる。

第二段: 次に  $\mathcal{D} \cap X'$  を除く。第一段と同じように、 $\mathcal{D} \cap X'$  の連結要素の個数を  $\mu$  とすると、次が得られる。

(4.15) 補題: 種数  $p+\lambda+\mu$  の対  $(T_{p+\lambda+\mu}(S^3))$  と、その二つの good-system  $A'' = \{A''_1, \dots, A''_{n+\lambda+\mu}\}$ ,  $X'' = \{X''_1, \dots, X''_{n+\lambda+\mu}\}$  と、更に、互いに交わらない proper な 2次元胞体の系  $\mathcal{D}' = \{D'_1, \dots, D'_\mu\}$  が  $S^3 - \bar{T}_{p+\lambda+\mu}$  に存在して次を満たす:

$$(1) \quad \langle T_p(A) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+\lambda+\mu}(A'') \subset S^3 \rangle,$$

$$\langle T_p(X) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+\lambda+\mu}(X'') \subset S^3 \rangle,$$

$$(2) A'' \cap X'' = \emptyset, A'' \cap D' = \emptyset, D' \cap X'' = \emptyset,$$

(3)  $D'$  は  $S^3 - \overset{\circ}{T}_{p+\lambda+\mu}(A'')$  を  $\nu$  個の 2-irreducible 3次元多様体に分解する。

証明:  $D_i \cap X'_j$  の  $(D_i$  上の最小の) 単純弧  $Y$  について、正則近傍  $N(Y; S^3 - \overset{\circ}{T}_{p+\lambda})$  をとり、前の証明と同じように、この2次元胞体  $N(Y; S^3 - \overset{\circ}{T}_{p+\lambda}) \cap \partial T_{p+\lambda}$  を  $B \cup Y$  とおく。すると、 $T_{p+\lambda} \cup N(Y; S^3 - \overset{\circ}{T}_{p+\lambda})$  は種数  $p+\lambda+1$  の輪環体となり、これを  $T_{p+\lambda+1}$  と書く。  $Y$  は  $D_i$  での  $X'_j$  での proper だから、 $\overline{D_i - N(Y; S^3 - \overset{\circ}{T}_{p+\lambda})} = D_i^* \cup D_i^{**}$ ,  $\overline{X'_j - N(Y; S^3 - \overset{\circ}{T}_{p+\lambda})} = X_j^* \cup X_j^{**}$  とおき、 $X_j^* \cap Y'_j = X'_j \cap Y'_j$ ,  $X_j^{**} \cap Y'_j = \emptyset$  としてよい。  $D_i \cap (A' \cup B) = \emptyset$  より  $(D_i^* \cup D_i^{**}) \cap (A' \cup B) = \emptyset$  である。そこで、前の場合と同じように、次の法則で添数と付与すると、新しい対  $(T_{p+\lambda+1} \subset S^3)$  の  $\Rightarrow$  a good-system  $A'' = \{A_1'', \dots, A_{n+\lambda+1}''\}$ ,  $X'' = \{X_1'', \dots, X_{n+\lambda+1}''\}$  と、 $S^3 - \overset{\circ}{T}_{p+\lambda+1}$  における互いに交わらない2次元胞体の系  $D' = \{D'_1, \dots, D'_\nu\}$  を得る。

$$\begin{cases} A'_k \rightarrow A''_k & k=1, \dots, n+\lambda, \\ D_i^* \rightarrow A''_{n+\lambda+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B'_k \rightarrow B''_k & k=1, \dots, n+\lambda, \\ B \rightarrow B''_{n+\lambda+1}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} X'_k \rightarrow X''_k & \text{for } k < j, \\ X_j^* \rightarrow X''_j, X_j^{**} \rightarrow X''_{j+1}, \\ X'_k \rightarrow X''_{k+1} & \text{for } k > j. \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y'_k \rightarrow Y''_k & \text{for } k < j, \\ Y'_j \rightarrow Y''_j, Y \rightarrow Y''_{j+1}, \\ Y'_k \rightarrow Y''_{k+1} & \text{for } k > j. \end{cases}$$

$$D_k \rightarrow D'_k \text{ for } k \neq i,$$

$$D_i^{**} \rightarrow D'_i.$$

明らかに、(1)  $\langle T_p(A) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+\lambda}(A') \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+\lambda+1}(A'') \subset S^3 \rangle$ ,

$\langle T_p(X) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+\lambda}(X') \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+\lambda+1}(X'') \subset S^3 \rangle$ , (2)  $A'' \cap X'' = \emptyset$ ,  $A'' \cap \mathcal{Q}' = \emptyset$ ,  $\mathcal{Q}' \cap X'' = \mathcal{Q} \cap X' - Y$  が成り立ち、 $\mathcal{Q}$  の条件より (3) も成り立つ。

この操作を  $\mu$  回繰返すことにより、(4.15) が得られる。

第三段: 前段の補題(4.15)により得られた二つの good-system  $A''$  と  $X''$  が、補題 4.12 の  $A$  と  $X$  の条件を満たすことを示せば、補題 4.11 により、補題 4.4 の証明は完了する。4.12(1) は (4.15) の (2) であり、4.12(2) は  $X''$  が good-system であることより当然成り立つ。4.12(3) は、(4.15) の (3) と (2)  $\partial$ -irreducible の定義を合わせると得られる。

## §5. 主定理 3.9 の証明.

主定理 3.9 を証明する為に、まず次の補題が必要である。

5.1. 補題:  $p \neq 0$  をな knot type  $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  が、素分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{p_u} \subset S^3 \rangle$$

を持ち、各  $i=1, \dots, u$  について

(\*\*\*)  $S^3 - \dot{T}_{p_i}$  は  $\partial$ -irreducible である

と仮定する。更に  $\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_q \subset S^3 \rangle \# \langle T_r \subset S^3 \rangle$  を分解が存在するならば、 $\langle T_{p_i} \subset S^3 \rangle$  の添数を適当に付け表して

$$\langle T_q \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{p_t} \subset S^3 \rangle,$$

$$\langle T_r \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_{t+1}} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{p_u} \subset S^3 \rangle$$

とすることが出来る。但し  $0 \leq t \leq u$ 。

即ち、上記 (\*\*\*) の仮定を持つならば、 $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  の素分解は一意であることを示している。

証明：補題 4.4 の証明……即ち 4.13……の第一段と同じように、3次元球面  $S^3$  の中に  $u+1$  個の交わらない 3次元胞体  $D_0^3, D_1^3, \dots, D_u^3$  をとり、各  $D_1^3, \dots, D_u^3$  の内部に  $\langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle, \dots, \langle T_{p_u} \subset S^3 \rangle$  の代表元を作れ。各代表元の境界上の 2次元胞体と  $\partial D_0^3$  上の 2次元胞体を、 $\partial D_i^3$  と一つの 2次元胞体で交わるような細い棒でつなぐことにより、 $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  を得る。作り方が、 $\mathcal{Q} = \{D_1, \dots, D_u\} = \{\partial D_1^3 \cap (S^3 - \dot{T}_p), \dots, \partial D_u^3 \cap (S^3 - \dot{T}_p)\}$  とおけば、 $\mathcal{Q}$  は 2.7 の (\*) の条件を満たす系であることが判る。

今、仮定から、分解  $\langle T_q \subset S^3 \rangle \# \langle T_r \subset S^3 \rangle$  を与える 2次元球面  $\Sigma$  が  $S^3$  に存在する。ところが定理 2.8 より、 $S^3 - \dot{T}_p$  の proper な 2次元胞体  $\Sigma \cap (S^3 - \dot{T}_p)$  は、互いに交わらない 2次元胞体の系  $\{C_1, \dots, C_n\}$  より、有限回の  $\bar{\nu}$  型変換により得られる。但し、各  $C_i$  は  $D_1, \dots, D_u$  の一つとイソトープである。

$\partial D_1, \dots, \partial D_u$  は、 $T_p$  で 2次元胞体  $\partial D_1^3 \cap T_p, \dots, \partial D_u^3 \cap T_p$  を bound するから、 $\partial C_1, \dots, \partial C_n$  もまた  $T_p$  で 2次元胞体  $E_1, \dots, E_n$  を bound するとしてよい。結局、 $S^3$  のなかで、互いに交わらない 2次元球面の系  $\{C_1 \cup E_1, \dots, C_u \cup E_u\}$  が得られ、この系は、分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{S_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{S_{n+1}} \subset S^3 \rangle$$

と与え、各要素  $\langle T_{S_i} \subset S^3 \rangle$  は、集合

$$\mathcal{D} = \{ \langle T_0 \subset S^3 \rangle, \langle T_p \subset S^3 \rangle, \dots, \langle T_{p_n} \subset S^3 \rangle,$$

これら  $\langle T_p \subset S^3 \rangle, \dots, \langle T_{p_n} \subset S^3 \rangle$  の幾つかの和 }

に属し、更に各  $\langle T_p \subset S^3 \rangle, \dots, \langle T_{p_n} \subset S^3 \rangle$  は丁度一つの要素  $\langle T_{S_i} \subset S^3 \rangle$  について、その素を要素として含まれる。

この後は、2.9 の証明と全く平行に進むので、詳細は省略する。要するに、 $\sum_n (S^3 - T_p)$  を  $\{C_1, \dots, C_n\}$  から  $\bar{\nu}$  型変更ににより構成する際に、 $\bar{\nu}$  型変更に用いる  $\partial T_p$  上の単純弧の列  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  に沿って、同時に  $\{E_1, \dots, E_n\}$  にも  $\bar{\nu}$  型変更を行えば、補題 1.5 等の援用により、 $\Sigma$  が得られる。次の補題を挙げれば十分であらう。証明は略すが、 $\bar{\nu}$  型変更の定義をよく見れば明らかである。

5.2. 補題:  $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  を  $\langle T_p \subset S^3 \rangle$  の代表え、 $\Sigma_1, \Sigma_2$  を  $S^3$  の中の交わらない 2 次之球面で、 $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  は分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \langle T_{p_2} \subset S^3 \rangle \# \langle T_{p_3} \subset S^3 \rangle$$

と与えらとする。更に、 $\Sigma_1$  と  $\Sigma_2$  はそれぞれ、分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \langle \langle T_{p_2} \subset S^3 \rangle \# \langle T_{p_3} \subset S^3 \rangle \rangle,$$

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_2} \subset S^3 \rangle \# \langle \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \langle T_{p_3} \subset S^3 \rangle \rangle$$

と与えらとする。  $\alpha$  を  $\partial T_p$  上の単純弧で次の条件を満たすとする：  
 $\alpha \cap \Sigma_1 = \partial \alpha \cap \Sigma_1 \neq \emptyset \neq \alpha \cap \Sigma_2 = \partial \alpha \cap \Sigma_2$  .

今、 $\Sigma$  を、 $(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \cap (S^3 - \dot{T}_p)$  に  $\alpha$  に沿って  $\nabla$  型変更を行い、同時に  $(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \cap T_p$  に  $\alpha$  に沿って  $\nabla$  型変更を行って得られた  $S^3$  の 2 次元球面とすると、 $\Sigma$  は分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle\langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle\rangle \# \langle T_{p_2} \subset S^3 \rangle \# \langle T_{p_3} \subset S^3 \rangle$$

を与える。

### 5.3. 主定理 3.9 の証明：素分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{q_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{q_u} \subset S^3 \rangle$$

を与えらる 2 次元球面の系を  $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_{u-1}\}$  とおけば、2 次元胞体の系  $\{\Sigma_1 \cap (S^3 - \dot{T}_p), \dots, \Sigma_{u-1} \cap (S^3 - \dot{T}_p)\}$  は、 $S^3 - \dot{T}_p$  の  $\partial$ -素分解を与える。補題 1.13 (2.9 参照) より、 $S^3 - \dot{T}_p$  の  $\partial$ -素分解は一意であるから、このうち丁度  $n$  個は  $T_1$  である。即ち、

$\langle T_{q_1} \subset S^3 \rangle, \dots, \langle T_{q_u} \subset S^3 \rangle$  の中に、丁度  $n$  個  $\langle T_1 \subset S^3 \rangle$  が含まれる。補題 4.4 から

$$\langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{p_v} \subset S^3 \rangle = \langle T_{q_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{q_u} \subset S^3 \rangle$$

としてよい。補題 2.4 より、この分解は補題 5.1 の (\*\*\*) の条件を満たすので、定理 3.9 の証明は完了する。

5.4. 参考：定理 3.9 は、(\*\*) の仮定の上に更に、同じ個数の素分解を持つならば、その二つの素分解が一致する... という、非常に強い仮定のもとでの話となったが、ここはもっと弱くすることが可能である。が、準備が長くなり過ぎるので、今回はこの形に止めた。また、書き易くする為に、輪

環体  $T_p$  の話にしたが、Tsukui [16] のように閉曲面にしてもほとんど同じ結果が得られる。

### 参 考 文 献

- [1] J.W.Alexander : On the subdivision of 3-space by a polyhedron, Proc.Nat.Acad.Sci. U.S.A. 10(1924), 6-8.
- [2] D.B.A.Epstein : Curves on 2-manifolds and isotopies, Acta Math., 115(1966), 83-107.
- [3] C.D.Feustel : On pasting balls to handlebodies, Bull. Amer. Math.Soc., 76(1970), 720-722.
- [4] R.H.Fox : On the imbedding of polyhedra in 3-space, Ann. of Math.(2), 49(1948), 462-470.
- [5] H.B.Griffiths : On systems of curves orthogonal to a 3-dimensional handlebody, Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg, 31 (1967), 89-115.
- [6] J.L.Gross : A unique decomposition theorem for 3-manifolds with connected boundary, Trans.Amer.Math.Soc., 142(1969), 191-199.
- [7] T.Homma : On the existence of unknotted polygons on 2-manifolds in  $E^3$ , Osaka Math.J., 6(1954), 129-134.
- [8] W.Jaco : Three-manifolds with fundamental group a free product, Bull.Amer.Math.Soc., 75(1969), 972-977.
- [9] W.Magnus, A.Karrass and D.Solitar : Combinatorial Group Theory, Interscience, New York, 1966.
- [10] C.D.Papakyriakopoulos : On solid tori, Proc.London Math. Soc.(3), 7(1957), 281-299.



- [11] C.D.Papakyriakopoulos : On Dehn's lemma and asphericity of knots, Ann. of Math.(2), 66(1957), 1-26.
- [12] ————— : A reduction of the Poincaré conjecture to group theoretic conjectures, Ann. of Math.(2), 77(1963), 250-305.
- [13] J.Stallings : On the loop theorem, Ann. of Math.(2), 72 (1960), 12-19.
- [14] S.Suzuki : On linear graphs in 3-sphere, Osaka J. Math., 7(1970), 375-396.
- [15] G.A.Swarup : Some properties of 3-manifolds with boundary, Quart.J.Math. Oxford(2), 21(1970), 1-24.
- [16] Y.Tsukui : On surfaces in 3-space, Yokohama Math.J., 18 (1970), 93-104.
- [17] F.Waldhausen : Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphäre, Topology 7(1968), 195-203.